非保存系に対するシンプレクティック時間積分法

(株)砂子組　　正会員　○田尻　太郎
(株)砂子組　　正会員　　佐藤　昌志

1．はじめに

シンプレクティック法は特異性の強い非線形系の長時間積分にも安定な結果を与え、計算量は実質的に陽的オイラー法と同程度である。少ない計算量で無条件安定な解が得られるが、同法が確立された範囲は保存系に限られると思われる。ここでは 1 次の陽的シンプレクティック法を非保存線形系へ適用し、結果を理論解，ニューマークのβ法，4 次のルンゲ・クッタ法と比較して、実用的な有効性を確認した。

2．定式化

運動方程式として以下を仮定する。ただし Q＝(Q_j)は自由度 j＝1～n の一般化座標，u(Q)は保存力のポテンシャル。D は対角行列でγ＝(γ_j)は減衰定数。

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+D(\gamma)\frac{dQ}{dt}+\frac{\partial u(Q)}{\partial Q}=0 \qquad \text{(式.1)}$$

(式.1)を導く保存的なハミルトニアンはないが、一般化運動量を P＝dQ/dt とすると $P_j=dV_j/dQ_j$ となる関数 $V_j(Q_j)$ が局所的には存在すると考えられるので、そのハミルトニアンは、

$$H=\sum_j \frac{1}{2}P_j^2+\sum_j \gamma_j V_j(Q_j)+u(Q) \qquad \text{(式.2)}$$

と書ける。(式.2)の正準方程式は以下である。

$$\frac{dQ_j}{dt}=P_j \qquad \text{(式.3)}$$

$$\frac{dP_j}{dt}=-\gamma_j\frac{dV_j(Q_j)}{dQ_j}-\frac{\partial u(Q)}{\partial Q_j}\quad ,\quad P_j=\frac{dV_j(Q_j)}{dQ_j}$$

最後の関係は V_j の定義による。(式.3)のｼﾝﾌﾟﾚｸﾃｨｯｸ解法は，τを時間ステップ幅として次式となる

$$Q_j(t+\tau)=Q_j(t)+\tau P_j(t) \qquad \text{(式.4)}$$

$$P_j(t+\tau)=P_j(t)-\tau\gamma_j P_j(t+\tau)-\tau\frac{\partial u(Q(t+\tau))}{\partial Q_j}$$

ここでレーリーまたはモード減衰を仮定して適当な直交変換 S で実座標(p，q)＝(S^tP，S^tQ)に戻れば、

$$q(t+\tau)=q(t)+\tau\, q(t) \qquad \text{(式.5)}$$

$$p(t+\tau)=(E+\tau C)^{-1}\left(p(t)-\tau\frac{\partial U(q(t+\tau))}{\partial q}\right)$$

を得る。E は単位行列，C＝SDS^t は減衰ﾏﾄﾘｯｸｽ，U(q)＝u(Q)。次に非保存力を持つ系の運動方程式を(式.6)とする。f(t)が時間に依存する非保存力であ

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{\partial U(q)}{\partial q}=f(t) \qquad \text{(式.6)}$$

るが、$f_j(t)=dF_j/dq_j$ となる関数 $F_j(q_j)$ が局所的には存在すると考えられるので、そのハミルトニアンと正準方程式とｼﾝﾌﾟﾚｸﾃｨｯｸ解法は、以下となる。

$$H=\sum_j \frac{1}{2}p_j^2+U(q)-\sum_j F_j(q_j) \qquad \text{(式.7)}$$

$$\frac{dq_j}{dt}=p_j \qquad \text{(式.8)}$$

$$\frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial u(Q)}{\partial Q_j}+\frac{dF(q_j)}{\partial q_j}\quad ,\quad f_j(t)=\frac{dF(q_j)}{\partial q_j}$$

$$q(t+\tau)=q(t)+\tau\, q(t) \qquad \text{(式.9)}$$

$$p(t+\tau)=p(t)-\tau\frac{\partial U(q(t+\tau))}{\partial q}+\tau\, f(t+\tau)$$

3．数値例

やや具体的な例として、橋脚の伸び振動の運動方程式を考える。ただし M は質量ﾏﾄﾘｯｸｽで Lamped Mass，K は剛性ﾏﾄﾘｯｸｽである。

$$M\frac{d^2q}{dt^2}+C\frac{dq}{dt}+Kq=Mf(t) \qquad \text{(式.10)}$$

f(t)は平成 15 年十勝沖地震（本震）の幕別町本町の気象庁強震加速度記録 120 秒の 20～60 s 間を 10 Hz ハイカット処理したものを柱頭に力として作用させる（図-9）。(式.10)のパラメータ諸元は、上部工反力 10 tf を持つ径 1 m のｺﾝｸﾘｰﾄ円柱橋脚とし、弾性係数は 25000 N/mm^2，長さ 10 m，減衰は全ﾓｰﾄﾞに対して臨界減衰比 3%とする。単位体積重量は 24 kN/m^3。

4．計算結果（柱頭変位）

最初に解法の基本特性を見るため、無減衰で橋脚を 1 本の弾性棒とみなした。固有周期は T_0＝0.015 s。時間ｽﾃｯﾌﾟ幅τ＝T_0/15（図-1）とした場合、定常状態においてﾙﾝｹﾞｸｯﾀ法(4 次)は数値減衰のために解が 0 に収束する。β=1/4 のﾆｭｰﾏｰｸ法は無条件安定でｴﾈﾙｷﾞｰの保存性を示すが、振幅は理論解の数倍になる。ｼﾝﾌﾟﾚｸﾃｨｯｸ法は無条件安定で同様である。τ＝T_0/45（図-2）では、どの解法も定常状態でほぼ同等な振幅を示し、ﾙﾝｹﾞｸｯﾀ法に目立った減衰はみられない。

キーワード　シンプレクティック積分法，非保存系，陽解法，無条件安定
連絡先　〒060-0033　札幌市中央区北３条東８丁目　（株）砂子組　ＴＥＬ011-232-8231

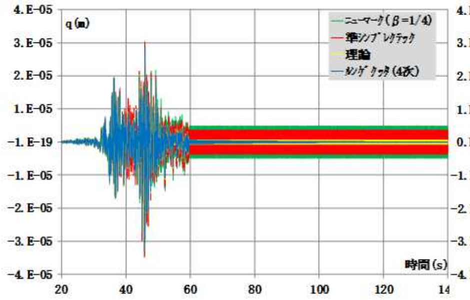

図-1 無減衰, $\tau=T_0/15$, 1 分割

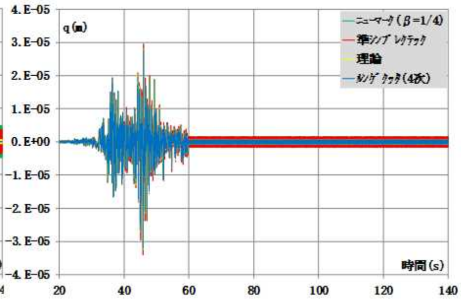

図-2 無減衰, $\tau=T_0/45$, 1 分割

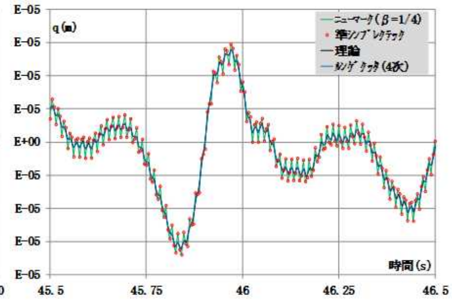

図-3 無減衰, $\tau=T_0/45$, 1 分割

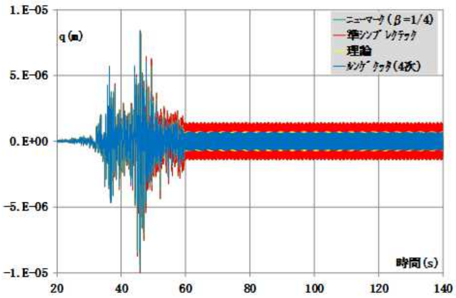

図-4 無減衰, $\tau=T_{10}/5$, 10 分割

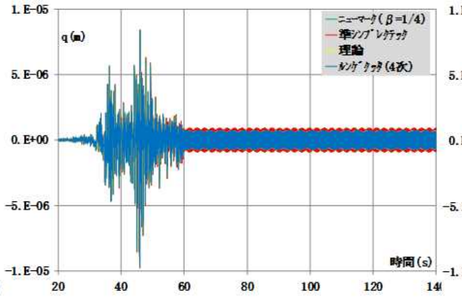

図-5 無減衰, $\tau=T_{10}/10$, 10 分割

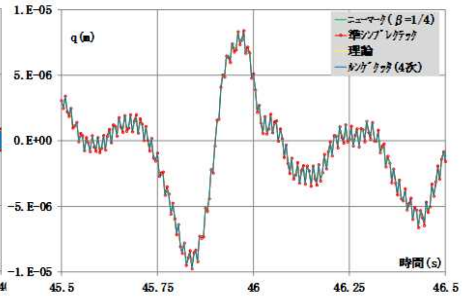

図-6 無減衰, $\tau=T_{10}/10$, 10 分割

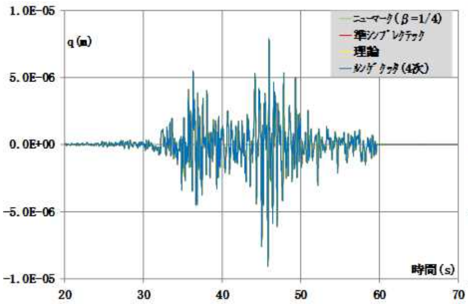

図-7 減衰 3%, $\tau=T_{10}/3$, 10 分割

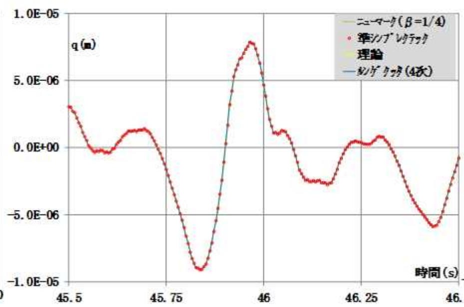

図-8 減衰 3%, $\tau=T_{10}/3$, 10 分割

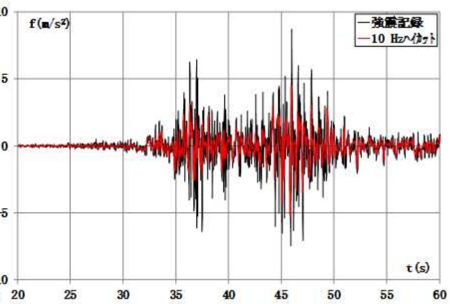

図-9 平成 15 年十勝沖地震（本震，UD 成分）

図-2 の最大変位付近が図-3 であるが、ﾙﾝｹﾞｸｯﾀ法が最も精度が良く、ﾆｭｰﾏｰｸ法とｼﾝﾌﾟﾚｸﾃｨｯｸ法は同じ挙動で実用的に問題ないと考えられる。

次に橋脚を棒要素で 10 等分割すると最大固有周期は $T_0=0.014$ s,最小は $T_{10}=0.001$ s になる。$\tau=T_{10}/5$ とすると（図-4） τ が十分小さいため、ﾙﾝｹﾞｸｯﾀ法に減衰は見られず振幅は理論解と同一である。ﾆｭｰﾏｰｸ法とｼﾝﾌﾟﾚｸﾃｨｯｸ法は定常状態で理論解の 2 倍程度の振幅であるが、最大変位は理論解とほぼ同等である。$\tau=T_{10}/10$ とすると（図-5）全ての解はほぼ一致する。図-5 の最大変位付近が図-6 であるが、どの解法も理論解と良く一致している。

図-7，8 は 10 分割で減衰比 3%， $\tau=T_{10}/3$ としたケースであるが、減衰のため解が平滑化され、数値解は理論解と非常に良く一致する。

表-1 は、10 分割，無減衰， $\tau=T_{10}/3$ で解析時間 5000 s（最小周期の 5000000 周期分）に対する各解法の計算時間を示す。5000 s に対し、どの方法にも解の発散や減衰は見られなかった。

表-1 CPU 負担の比較（Matrix Size＝10）

解法	近似次数	計算時間(s)	解析時間(s)
ﾙﾝｹﾞ・ｸｯﾀ	4次	51	5000
ﾆｭｰﾏｰｸ(β=1/4)	2次	95	
準ｼﾝﾌﾟﾚｸﾃｯｸ	1次	15	

5．まとめ

(1) 無条件安定な 2 次解法ﾆｭｰﾏｰｸ(β=1/4)と、1 次の陽的ｼﾝﾌﾟﾚｸﾃｯｸ法は、ほぼ同等な性能を示した。

(2) 減衰を受ける系では、1 次の陽的ｼﾝﾌﾟﾚｸﾃｯｸ法はﾙﾝｹﾞ・ｸｯﾀ(4 次)とも、ほぼ同等な性能である。

(3) 近似次数が低いため、ｼﾝﾌﾟﾚｸﾃｯｸ法の CPU 負担は最も小さく、ﾆｭｰﾏｰｸ法の 1/6 程度である。

(4) 本文に詳細は記載しなかったが、計算手続きはｼﾝﾌﾟﾚｸﾃｯｸ法が最も単純で、原理的には非線形系にも同じ計算を適用できる。

※ ﾆｭｰﾏｰｸ法では非線形系で毎回非線形方程式を解く.

(5) 1 次の陽的ｼﾝﾌﾟﾚｸﾃｯｸ法は、非線形衝撃問題でも無条件安定な解を与えると思われる。